## 3.4 Енумерација

### 3.4.1 Ефективно набројиви скупови

**Дефиниција 3.18** *Скуп $X$ је* набројив *ако и само ако постоји бијекција* $f : X \to \mathbf{N}$.

**Дефиниција 3.19** *Скуп $X$ је* ефективно набројив *ако и само ако постоји бијекција $f : X \to \mathbf{N}$ таква да су функције $f$ и $f^{-1}$ интуитивно израчунљиве.*

*Напомена:* Приметимо да се у овој дефиницији користи појам интуитивно израчунљивих функција чији домен није $\mathbf{N}$. Формална дефиниција захтева уопштење строго заснованог појма израчунљивости проширивањем овог појма и на функције чији домен може бити произвољан пребројив скуп.

**Дефиниција 3.20** Енумерација *скупа $X$ је пресликавање $g : \mathbf{N} \overset{\text{,,на''}}{\to} X$. Тада пишемо $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ (где је $x_n = g(n)$).*

*Ако је функција $g$ ,,1-1'', онда кажемо да је $g$* енумерација без понављања.

**Теорема 3.10** *Следећи скупови су ефективно набројиви:*

*(i)* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$

*(ii)* $\mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$

*(iii)* $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}^k$ *(скуп свих коначних низова)*

**Доказ:**

*(i)* Нека је функција $\pi : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ дефинисана на следећи начин:

$$\pi(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$$

Докажимо да је овако дефинисана функција бијекција. Најпре ћемо доказати да је $\pi$ ,,1-1'' функција.

$$\begin{aligned} \pi(m,n) = \pi(x,y) &\Rightarrow 2^m(2n+1) - 1 = 2^x(2y+1) - 1 \\ &\Rightarrow 2^m = 2^x \wedge 2n+1 = 2y+1 \\ &\Rightarrow m = x \wedge n = y \\ &\Rightarrow (m,n) = (x,y) \end{aligned}$$

Докажимо сада да је $\pi$ ,,на'' функција.

$$\begin{aligned} \pi(m,n) = x &\Rightarrow 2^m(2n+1) - 1 = x \\ &\Rightarrow 2^m(2n+1) = x+1 = 2^{(x+1)_1}\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}} \\ &\Rightarrow m = (x+1)_1,\ n = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}} - 1\right) \end{aligned}$$

Приметимо да $\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}}-1\right) \in \mathbf{N}$. Важи:

$$\pi((x+1)_1, \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}}-1\right)) = 2^{(x+1)_1}\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}}-1\right)+1\right)-1 = x$$

па функција $\pi$ јесте бијекција.

Даље, функција $\pi$ је примитивно рекурзивна, као композиција примитивно рекурзивних функција. Она је онда и рекурзивна, одакле, на основу Черчове тезе, следи да је она израчунљива.

Докажимо сада да постоје функције $\pi_1, \pi_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такве да је $\pi^{-1}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x))$ и да су оне израчунљиве (довољно је доказати да су примитивно рекурзивне). Лако се проверава да функције:

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= (x+1)_1 \\ \pi_2(x) &= \left[\frac{\left[\frac{x+1}{2^{(x+1)_1}}\right] \dot{-} 1}{2}\right]\end{aligned}$$

задовољавају тражене услове.

Алтернативно, функције $\pi_1$ и $\pi_2$ се могу дефинисати и на следећи начин, користећи особину да је $\pi$ бијекција и да $m, n \leq \pi(m,n)$ за све $m, n$ $(m, n \in \mathbf{N})$:

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= \mu(m \leq x)\left[(\exists_1 n)(0 \leq n \leq x \wedge \pi(m,n) = x)\right] \\ &= \mu(m < x+1)\left[\sum_{n=0}^{x} eq(\pi(m,n),x) = 1\right] \in \mathcal{PR} \\ \pi_2(x) &= \mu(n < x+1)\left[\sum_{m=0}^{x} eq(\pi(m,n),x) = 1\right] \in \mathcal{PR}\end{aligned}$$

$(ii)$ Нека је функција $\xi : \mathbf{N}^{+^3} \to \mathbf{N}$ дефинисана на следећи начин:

$$\xi(m,n,p) = \pi(\pi(m-1,n-1),p-1)$$

Како је функција $\pi$ примитивно рекурзивна и бијективна, следи да је и функција $\xi$ примитивно рекурзивна и бијективна:

$$\begin{aligned}\xi(m,n,p) = x &\Leftrightarrow \pi(\pi(m-1,n-1),p-1) = x \\ &\Leftrightarrow \pi(m-1,n-1) = \pi_1(x) \wedge p-1 = \pi_2(x) \\ &\Leftrightarrow m-1 = \pi_1(\pi_1(x)) \wedge n-1 = \pi_2(\pi_1(x)) \wedge p-1 = \pi_2(x) \\ &\Leftrightarrow \xi^{-1}(x) = (\pi_1(\pi_1(x))+1, \pi_2(\pi_1(x))+1, \pi_2(x)+1)\end{aligned}$$

(*iii*) Сваки природан број $x$ се јединствено може изразити у облику $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i$, где је $\alpha_i \in \{0,1\}$ за све $i$ ($i \in \mathbf{N}$). Одатле, сваки позитиван цео број $x$ може се јединствено изразити у облику $x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_l}$, где $0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_l$. Даље, следи да се сваки позитиван цео број $x$ може јединствено изразити у облику $x = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \cdots + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_l+(l-1)}$, где $0 \leq a_i$, $1 \leq l$.

Користећи претходну идеју можемо дефинисати функцију $\tau : \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ на следећи начин:

$$\tau(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \cdots + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_k+k-1} - 1$$

Функције $\tau$ и $\tau^{-1}$ су бијективне и примитивно рекурзивне, одакле следи да је скуп $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}^k$ ефективно пребројив.

*Напомена:* За енумерацију (кодирање) коначних низова може се користити и неки други начин кодирања, на пример:

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = 2^{x_1} 3^{x_2} \cdots pn(n)^{x_n}$$

□

### 3.4.2 Енумерација програма

**Теорема 3.11** *Скуп $\mathcal{P}$ свих* URM *програма је ефективно пребројив.*

**Доказ:**

Сваки URM програм састоји се од коначног низа инструкција из скупа $\mathcal{I}$.[23] Сваку инструкцију из тог низа могуће је погодно кодирати неким природним бројем, па онда тврђење следи на основу теореме 3.10 (део (*iii*)).

Дефинишимо функцију $\beta : \mathcal{I} \to \mathbf{N}$ на следећи начин:
$\beta(Z(n)) = 4(n \dot{-} 1)$
$\beta(S(n)) = 4(n \dot{-} 1) + 1$
$\beta(T(m,n)) = 4\pi(m \dot{-} 1, n \dot{-} 1) + 2$
$\beta(J(m,n,p)) = 4\xi(m,n,p) + 3$

Функција $\beta$ је израчунљива, бијективна и за функцију $\beta^{-1}$ важи (нека је $x = 4u + r$, $0 \leq r \leq 3$):
$\beta^{-1}(x) = Z(u+1)$, ако $r = 0$
$\beta^{-1}(x) = S(u+1)$, ако $r = 1$
$\beta^{-1}(x) = T(\pi_1(u)+1, \pi_2(u)+1)$, ако $r = 2$
$\beta^{-1}(x) = J(\pi_1(\pi_1(u))+1, \pi_2(\pi_1(u))+1, \pi_2(u)+1)$, ако $r = 3$

Дакле, и функција $\beta^{-1}$ је израчунљива, па је скуп $\mathcal{I}$ ефективно пребројив. На основу теореме 3.10 (део (*iii*)), следи да је и скуп $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}^k$ ефективно пребројив, тј. скуп $\mathcal{P}$ свих URM програма је ефективно пребројив. Постоји више различитих одговарајућих бијекција (различитих

[23] $\mathcal{I}$ је скуп свих URM инструкција.

кодирања), али ми ћемо у даљем тексту користити следећу бијекцију $\gamma : \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}^k \to \mathbf{N}$:

$$\gamma(I_1, I_2, \ldots, I_k) = \tau(\beta(I_1), \beta(I_2), \ldots, \beta(I_k))$$

□

**Дефиниција 3.21** *За* URM *програм* $P$ *вредност* $\gamma(P)$ *називамо* индексом (кодним бројем) *програма* $P$ *или* Геделовим бројем *програма* $P$.

**Дефиниција 3.22** URM *програм* $P$ *за који важи* $P = \gamma^{-1}(n)$ *називамо* $n$-тим URM програмом *и означавамо га са* $P_n$.

*Напомена:* За различите вредности $m$ и $n$, програми $P_m$ и $P_n$ се разликују, али то не мора да значи да они израчунавају различите функције.

### 3.4.3 Енумерација израчунљивих функција

За $a \in \mathbf{N}$ и $n \geq 1$ уводимо следеће ознаке:

$$\begin{aligned}
\Phi_a^{(n)} &= f_{P_a}^{(n)} = n\text{-арна функција коју израчунава програм } P_a \\
W_a^{(n)} &= \mathrm{Dom}(\Phi_a^{(n)}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid P_a(x_1, \ldots, x_n) \downarrow\} \\
E_a^{(n)} &= \mathrm{Range}(\Phi_a^{(n)}) = \{\Phi_a^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom}(\Phi_a^{(n)})\}
\end{aligned}$$

Уколико експлицитно не нагласимо другачије сматрамо да је реч о *унарним* израчунљивим функцијама и уместо $\Phi_a^{(1)}$, $W_a^{(1)}$, $E_a^{(1)}$ пишемо краће $\Phi_a$, $W_a$, $E_a$.

Свака унарна израчунљива функција појављује се у енумерацији $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$, при чему је то енумерација са понављањем (јер постоје различити програми који израчунавају исту функцију).

Све израчунљиве функције могу бити енумерисане и на другачији начин. Може се кренути од рекурзивних функција (уместо од URM програма). Оне могу бити енумерисане и та енумерација индукује и енумерацију израчунљивих функција (то је енумерација са понављањем као и у првом приступу).

**Теорема 3.12** *Скуп свих $n$-арних израчунљивих функција $\mathcal{C}^{(n)}$ је набројив.*

**Теорема 3.13** *Скуп свих израчунљивих функција $\mathcal{C}$ је набројив.*

**Доказ:**

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}^{(n)}$$

Како је набројива унија набројивих скупова такође набројив скуп, следи да је скуп свих израчунљивих функција $\mathcal{C}$ набројив. □

**Задатак 82** *Доказати да свака израчунљива функција има пребројиво много појављивања (пребројиво много индекса) у енумерацији свих израчунљивих функција.*

**Решење:**

Нека је функција $f$ израчунљива. Тада, на основу тезе Черча, постоји (бар један) програм $P$ који је израчунава. Функција $f$ се, дакле, у енумерацији свих израчунљивих функција појављује на $\gamma(P)$-том месту (тј. $f = \Phi_a$, где је $a = \gamma(P)$).

Програму $P$ можемо додати неку наредбу без дејства (нпр. $T(1,1)$). Тако измењени програм има различит кôд (тј. одговара му други индекс), али и даље израчунава исту функцију $f$. Понављајући овај поступак можемо да закључимо да функција $f$ има бесконачно много индекса у низу свих израчунљивих функција (јер има бесконачно много програма који је израчунавају).

Индекси функције $f$ чине, дакле, бесконачан подскуп скупа $\mathbf{N}$, па је и тај подскуп пребројив. Дакле, свака израчунљива функција $f$ има пребројиво много индекса у низу свих израчунљивих функција.

**Задатак 83** *Доказати да тоталних неизрачунљивих функција* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *има непребројиво много.*

**Решење:**

У општем случају за број пресликавања из скупа $A$ у скуп $B$ важи следећа једнакост:

$$|\{f \mid f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$$

У случају тоталних функција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, она се своди на:

$$|\{f \mid f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}\}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathcal{C}$$

Дакле, тоталних функција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ има непребројиво много, па како тоталних *израчунљивих* функција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ има пребројиво много, следи да тоталних *неизрачунљивих* функција $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ има непребројиво много.